

Tutorato di Statistica 1 del 08/04/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.

Siano X e Y due variabili aleatorie con distribuzione uniforme sull'insieme dei punti con coordinate intere in $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 7; x \leq y \leq x + 2\}$.

La funzione di densità di probabilità discreta congiunta è quindi $f(x, y) = \frac{1}{24}$, per $(x, y) \in S$. Trovare:

1. Le densità marginali $f_X(\cdot)$ e $f_Y(\cdot)$
2. La $f_{Y|X}(y|x)$ densità discreta condizionata di Y rispetto a X .
3. La media di Y condizionata a $X = x$, $E[Y|x]$
4. La varianza di Y condizionata a $X = x$, $Var(Y|x)$

Esercizio 2.

Sia (X_1, X_2, \dots, X_n) , $n \in N$ un campione casuale estratto da una distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$

1. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza $T := T_n$ per p .
2. È un stimatore non distorto? (Motivare)
3. Determinare l'errore quadratico medio
4. È lo stimatore trovato T una statistica sufficiente? (si scriva cosa si intende per Statistica Sufficiente e si verifichi che T lo sia quando $n = 2$)
5. Si consideri la successione degli stimatori T_n al variare della lunghezza del campione n , $\{T_n\}_n$. Si dica cosa si intende per successione di stimatori semplicemente consistenti e si verifichi che $\{T_n\}_n$ lo sia.
6. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza V per la varianza della distribuzione di Bernoulli.
7. È V non distorto? (Motivare)
8. Trovare il valore di c affinché cV sia uno stimatore non distorto della varianza della distribuzione di Bernoulli.

Esercizio 3.

Sia (X_1, \dots, X_n) , $n \in N$ un campione casuale estratto da una distribuzione esponenziale con densità di probabilità $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x \in R^+$, $\theta > 0$.

1. Trovare lo stimatore T di massima verosimiglianza per θ .
2. Determinare se T non è distorto.
3. Determinare l'errore quadratico medio di T .
4. Determinare la funzione di distribuzione di probabilità di:
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Esercizio 4.

Sia (X_1, \dots, X_n) , $n \in \mathbb{N}$ un campione casuale estratto da una distribuzione con densità di probabilità

$$f(x, \theta) = \theta x^{(\theta-1)}, \text{ per } x \in (0, 1), \theta > 0.$$

Determinare lo stimatore T di θ con il metodo dei momenti.